GIOVANNI DANDOLO

INTORNO AL NUMERO

DISCUSSIONI PSICOLOGICHE

PADOVA
ANGELO DRAGHI LIBRAIO-EDITORE
1896

Digitized by Google

Math 68.7

V

HARVARD COLLEGE LIBRARY
MINOT FUND
Jan 11, 1927

R. Stab. Prosperini 1896

Digitized by Google

Questo studio è diviso in due parti: la prima dal I.° al IX.° capitolo; la seconda dal X.° alla fine. Nella prima rimescolo una materia già nota; nella seconda significo un mio modo di vedere circa la questione del numero.

Se quest' ultima parrà ad alcuno troppo lenta e pesante, voglia indulgere all' intenzione (ahi, troppo debole schermo!) che ho avuto, di non sacrificare alla brevità la chiarezza.

Digitized by Google

Digitized by Google

SOMMARIO

I L'argomento - II Definizioni analitiche e genetiche in generale - III Concezioni realistiche e nominalistiche delle entità matematiche - IV Il numero come qualità astratta degli oggetti - V Il concetto di rapporto, di gruppo o aggregato, di ordine rispetto al numero - VI Si discute un concetto convenzionale del numero - VII Il numero come segno degli oggetti - VIII Il numero identificato colle interruzioni della coscienza - IX Difficoltà che ineriscono al concetto di unità.

X Dell' impenetrabilità fisica e psichica: concetti che ne derivano e che hanno attinenza col numero - XI Un appunto storico-critico - XII Dell'uno - XIII Del numerare e del numero - XIV Dell' unità - XV Spazio, Tempo, Continuo, Infinito e Numero - XVI Riassunto e Conclusione.

Digitized by Google

Digitized by Google

I

Non discuto il numero come entità o forza metafisica che si assume ad essenza, elemento, principio, condizione insomma esplicativa dell' universo. Questo concetto balenato al pensiero dei Pitagorici, e largamente svolto nelle loro dottrine, che non sempre però armonizzano nell' unità di una comune sentenza, fu ripreso dal divino Platone. E Speusippo e Xenocrate, modificando la dottrina del maestro, quegli sopprimendo il numero *ideale*, questi identificandolo col *matematico*, quasi pervennero a togliere ogni divario tra il pitagoreismo e il platonismo, assecondando così una certa tendenza che apparisce negli ultimi scritti del maestro stesso. Il quale, com'è risaputo, stimava la matematica tal guida al sapere da voler che s' incidessero sulla porta della scuola le famose parole: non entri qui chi non sa di geometria; — e aveva anche detto che Dio eterna-

Digitized by Google

mente geometrizza; il quale motto più recentemente Gauss estendeva nell' altro: Dio fa opera di aritmetica.

Questa, a dir così, lampada filosofica del numero, si trasmette lungo tutta la storia della Filosofia: ma senza grandi splendori. L' Uno dei Neoplatonici, e il "*de ente et uno*„ argomento così favorito nel Medio Evo, sono infeconde guerriglie metafisiche: e Nicola da Cusa e Giordano Bruno che rivendicano i diritti del numero nella filosofia che si rinnova, non concludono dinanzi ai diritti della ragione. Ben disse Galileo che l' universo è un libro scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli cerchi ed altre figure geometriche senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola: ma egli faceva la scienza meccanica del cielo, non la filosofia della natura.

In epoche più recenti, e nella stessa epoca nostra, si ravvivò per il numero un caloroso entusiasmo, lo si considerò come l'alfa e l'omega dell'essere universale. Si parlò della potenza fisica del numero, della sua potenza biologica, della sua potenza psichica, e logica e cosmica: ma con fortuna? Io non oso asserirlo — Egli è certo che la quantità è la più semplice e la più chiara di tutte le categorie,

Digitized by Google

ma è anche la più povera: e la pretesa di sottomettere ogni realtà al numero, è una chimera.(1)

Ad ogni modo, ripeto, non discuterò il numero da questo punto di vista. Io vorrei indagarlo nella sua genesi psicologica, per seguirlo nella sua trasformazione in entità logico-matematica: ricercando quali concetti sono in esso implicati o hanno con esso una qualche relazione. E se mai dall'esigenza stessa del tema sarò costretto a toccare anche della natura e del valore delle conoscenze matematiche che si fondano sul numero, farò come colui il quale trovandosi dinanzi ad una grande fabbrica in costruzione, vede scritto al sommo di una porta: vietato l'ingresso a chi non appartiene al lavoro. Egli allora si studia, girando intorno, di cacciare l'occhio avido attraverso a qualche fessura compiacente dell'alto assito che la circonda, e riporta così una qualche idea dell'opera che ferve là dentro.

II

Se si prendono in esame alcune fra le più note definizioni del numero, non è difficile rilevare in ognuna qualche imperfezione. Della qual cosa si capisce anche il perchè, ove si pensi che di nessun

(1) Vedi *Ch. Benard.* La philos. anc. pag. 41 e segg.

Digitized by Google

fatto si può avere per certa la natura, se prima non se ne è colta l'origine; e l'origine psicologica del numero non è poco profonda e nebulosa.

Le definizioni analitiche, che hanno un valore logico indiscutibile, sono per altro scientificamente inferiori alle genetiche nei riguardi delle nuove acquisizioni e, vorrei dire, dei guadagni che ci fa il pensiero: poichè in quelle si sviluppa un processo tutto formale che rompe una sintesi nella molteplicità de' suoi elementi; in queste si scopre l'elemento medesimo nell'originaria sua virtualità; e non a semplice titolo di dato formale, ma di fattore reale ed effettivo. La definizione analitica discerne un fatto, la genetica penetra fino a disvelarne la causa e la ragione: e da ciò risulterebbe che essa sola ha il pregio di essere veramente scientifica.

Quindi è che se non si afferra l'entità numero nella sua genesi psicologica, la definizione del concetto di numero sarà sempre arbitraria, e potrà esser fallace. Nè qui mi si dica che il regno logico è indipendente dal regno psicologico, chè sarebbe un' obbiezione fuor di proposito: poichè se tale indipendenza può essere affermata rispetto alle forme logiche di cui rivestiamo i prodotti del pensiero massimamente ai servigi del ragionamento, essa non persiste più quando di codeste forme s'abbia di

Digitized by Google

mira il contenuto reale e conoscitivo. Se non che, per le definizioni delle entità matematiche giova osservare che le genetiche e le analitiche, fino a un certo punto, si equivalgono; perchè essendo codeste entità costruzioni del pensiero, che non trovano nell'oggetto un corrispondente adeguato, gli elementi che l'analisi in esse svela, sono anche le ragioni generatrici del concetto.

III

Prima di venire alla esposizione critica di qualche definizione del numero, mi piace sommariamente ricordare come la filosofia abbia riguardato le entità matematiche in generale, il numero compreso, secondo due aspetti, *realistico* e *nominalistico*.

Cartesio e Leibniz, platoneggiando, ammettono che le idee delle entità matematiche abbiano una reale esistenza nello spirito, e che le percezioni esterne ne eccitino la reminiscenza — Per Kant, invece, le percezioni esterne stimolerebbero l'attività costruttiva dell'intuizione.

Per Hobbes le entità matematiche sono concetti formati artificialmente ed arbitrariamente, e fissati da un nome.

Digitized by Google

La dottrina di Locke presenta incertezze e contraddizioni. Da una parte le idee delle entità matematiche derivano dalle percezioni, dall'altra esse sono come i modelli o tipi nello spirito di cose reali.

Ma accanto alla percezione, bisogna porre l'arbitrio, il quale introduca quelle variazioni che la sottraggano alla mutabilità che è caratteristica delle rappresentazioni puramente empiriche. Ora non s'intende bene come non sia possibile che, essendo l'esperienza fonte di ogni scienza, ci possa essere scienza di entità alle quali l'esperienza non presenta oggetti corrispondenti.

Berkeley ovviò la difficoltà, identificando l'entità matematica e la rappresentazione sensibile: ma codesta identificazione è insostenibile, perchè le figure reali mancano dei caratteri che l'intelletto matematico attribuisce alle figure e, in generale, alle grandezze matematiche.

Hume par che ritorni al nominalismo di Hobbes. Considera le figure e i numeri matematici, non come rappresentazioni di figure e numeri reali, ma come nostre costruzioni, sebbene fatte con un elemento che è un dato della sensibilità. Questo elemento è il punto, dalla cui ripetizione risultano i numeri, e dalla cui ripetizione e disposizione risultano le figure. E non s'avvide che, ammettendo che il punto sia

Digitized by Google

un dato dell' esperienza, risorgono le difficoltà della teoria del Berkeley (1).

IV

Per alcuni matematici, come per es. il Cantor, il Lipschitz, lo Schröder il numero sarebbe una qualità degli oggetti esteriori separata mediante il processo astrattivo dalla loro rappresentazione (2). È facile osservare che così non può concepirsi il numero, dacchè la qualità è inerenza invariabile di un oggetto, mentre non c'è oggetto a cui il numero 5 non possa competere più o meno del 4.

È certo che il numero non è una qualità sensibile, perchèdovrebbe affettare un organo del senso nella sua specialità caratteristica e reale di numero, e conseguentemente dovrebb' essere secondo questa specialità rappresentabile.

Non esistendo, a rigore, un senso del numero, la rappresentabilità di esso, o s' impiglia necessariamente nella rappresentabilità degli enti nume-

---

(1) V. questa discussione nel Masci. *La fil. delle sc. ital.* Agosto 1885, p. 8-14. Sulla natura logica delle conoscenze matematiche.

(2) Per le fonti v. la bibliografia in fondo del volume; e specialmente G. Frege. Die Grundlagen der Arithmetik, ecc. Breslau, 1884 dove sono riportati i passi relativi. E Masci op. c.

Digitized by Google

rati; o se da questi si prescinda, è confinata in un segno convenzionale. Capisco che al disotto di questo segno convenzionale, s'appiatta un qualche cosa in cui coincidono i pensieri di tutti quanti gli uomini; ma questo qualche cosa non ha fondamento esteriore e sensibile, bensì interno e strettamente ideale: tanto che c'è ogni buona ragione per credere che nessuna mancanza di senso importi la soppressione dell'idea di numero.

A chiarire questo concetto, mi servirò di un'ipotesi strana, alla quale mi dà in qualche modo diritto la famosa di Condillac. Supponiamo che tutte le classi di sensazioni di cui è capace un uomo normale, siano suddivise e distribuite in altrettanti individui, di guisa che ogni individuo non ne possa avere che una. Credo che le anime di questi esseri, così imperfette e diversissime tra di loro, coinciderebbero però in un punto, nell'idea di numero: come quella che nasce piuttosto dalle esigenze della coscienza, che da quelle del mondo esteriore — In un altro punto, a dir vero, si troverebbero unite, nel sentimento, cioè, del tempo o della successione: lo che forma l'ambiente essenziale del fenomeno psichico ed ha col numero, lo vedremo, intimi rapporti.

Come poi si possa effettuare rispetto al corpo

Digitized by Google

l' assoluta astrazione dalle qualità sensibili, con necessità tale che il rimanente sia concepito attraverso il prisma della quantità numerica, non si capisce: non si capisce, dico, la ragione per cui questo supposto ideale residuo abbia a suggerire l'idea di numero, anzichè poniamo, idea di sostanza. Che se codesta astrazione non s'intendesse assoluta e totale ma semplicemente relativa e parziale, bisognerebbe naturalmente chiedere ai matematici da quali proprietà, o qualità, o contrassegni dell'oggetto conviene prescindere, per avere il pensiero di numero. Quando si tratta di costruire l'entità geometrica, può essere difficile sceverare dal corpo quanto deve essere scartato e quanto deve rimanere come oggetto di una integrazione del pensiero. Può esser difficile; tuttavia l'intento si raggiunge e il consentimento si ottiene. Ma circa il quanto e il quale da ritenersi o da abbandonarsi per arrivare all'entità numero, mi pare che non possa darsi questione. O si ritiene tutto o si abbandona tutto: nessuna pertinenza dell'oggetto è tale da giustificare in sè stessa il pensiero del numero.

Ora, quand'anche quest'astrazione totale fosse possibile, bisognerebbe poi che siffatti ideali residui in qualche cosa differissero tra di loro; perchè se si stringessero in una comune, assoluta identità da cui rimanesse esclusa per fino la differenziazione

Digitized by Google

temporale, non offrirebbero quella molteplicità da cui pare scaturisca una condizione del numero. E se il differenziamento fosse temporale, chè diverso d'altronde non potrebbe essere, si ridurrebbe ad una successsione pura di stati di coscienza privi di contenuto. Il che, parmi, sarebbe contraddittorio; perchè lo stato di coscienza non è confondibile coll'atto del pensiero; quest'ultimo è una realtà anche se privato di un contenuto reale, in cui basta che s'appunti; mentre la realtà del primo è tutta ed essenzialmente in un contenuto reale.

Ho detto qua sopra che non esiste a rigore un senso del numero; ma non voglio tacere che in talune contingenze par che ci sia un qualche espediente che lo simuli e lo sostituisca. Così, per es., il mandriano di pecore o buoi s'accorge a colpo d'occhio se il suo bestiame c'è tutto o se gliene manchi un qualche *capo*. Ora, ch'egli arrivi a questa notizia mediante il senso della vista, non c'è dubbio; ma non par possibile ammettere che per ciò egli colga cogli occhi un numero. Qualche volta egli non sa neanche quante siano le sue pecore, sa soltanto se ci sono tutte. E poichè l'intuizione è un'asilo d'ignoranza se non se ne scopre il fondamento, è vano in questo caso ricorrere ad essa: piuttosto gioverà pensare che la lunga pratica e l'esercizio

Digitized by Google

conoscitivo sopra ognuna di esse lo rendano accorto delle mancanti che non vede. Non sarebbe la sua la percezione di un numero, ma piuttosto la percezione, a dir così negativa, di uno o più individui: sarebbe, insomma, una percezione che non risponde ad una rimembranza. — E se questa spiegazione non sembrasse sufficiente nel caso che gl'individui fossero in numero straordinario, si potrebbe pensare ad una associazione tra l'idea del numero e la sensazione dello spazio occupato dal cumulo del bestiame; la sensazione della massa — Ad ogni modo da ingegnosità più acute altre spiegazioni si potranno ricavare, ma nessuna di esse inchiuderà del numero la diretta percezione.

V

Newton ha definito il numero per il rapporto di una grandezza qualunque ad un'altra omogenea presa come unità. Ma questa definizione o è circolare o è inadeguata: sempre imperfetta. Circolare, se per grandezza s'intende una molteplicità; inadeguata se si allude soltanto a grandezze geometriche, chè la sfera del numerabile comprende esse ed altro ancora (Masci).

Le definizioni che riconducono il numero a

Digitized by Google

una certa misura, a un certo rapporto, cominciano si può dire, con Aristotele, e furono preferite dai matematici per la loro generalità. (1) Ma si osserva che l'idea di numero è logicamente e cronologicamente anteriore a quella di misura o di rapporto. L'uomo non avrebbe potuto elevarsi all'idea di misurazione se prima non avesse imparato a contare. Diffatti: che significa misurare se non introdurre nel seno della quantità continua una discontinuità artificiale, e per questo artificio render misurabile ciò che in natura non sarebbe? (2)

Nè vale introdurre nel concetto di numero il concetto di gruppo o di aggregato, perchè vi s'insinua quello di sintesi e quindi di molteplicità, se non attualmente pensata, inevitabilmente supposta. Infatti non c'è gruppo che non sia gruppo di alcune cose; e per tal maniera la quantità numerica più o meno avvertita s'insinua nel definito. — S'aggiunga che incarcerando il numero nella sfera del concetto di gruppo, gli si dà un carattere tutto spaziale; e riuscirebbe poi difficile capire come tra le cose

---

(1) Vedi rinnovata la definizione newtoniana da Le Roy et Vincent nella « *Revue de met. et de mor.* » Settembre 1894 pagina 506.

(2) V. Noël, L' idée du nombre et ses conditions. *Revue philos.* Agosto 1886.

Digitized by Google

numerabili si potrebbero comprendere gli avvenimenti singolari che si seguono nel tempo. Se si ha a trovare del numero un incentivo esterno, io non so se esso consista più nella coesistenza di oggetti che nella successione di fatti: o non piuttosto con pari diritto nell'una e nell'altra cosa insieme.

E nemmeno il concetto di ordine determina in modo necessario il numero. (1) L'ordine, infatti, non potrebbe essere che temporale o spaziale; una certa disposizione o dei successivi o dei coesistenti. Ma l'ordine nel tempo s'immedesima nel concetto di serie, la quale suppone il numero e quindi non lo definisce; e l'ordine nello spazio non è mai tale che non possa essere invertito in mille maniere e combinazioni diverse: ma un ordine che possa essere qualunque, sfuggendo ad ogni necessità, è in fine un disordine.

Il prof. T. I. Stieltjes, della facoltà di scienze di Tolosa, in un suo recentissimo "Saggio sulla teoria dei numeri„ scrive: (2) «L'idea di numero ha la sua origine nella considerazione di più oggetti distinti. Questa nozione si riattacca a tale considerazione, dove si faccia astrazione dalla natura

(1) Kronecker, Ueber den Zahlbegriff. Iournal für die reine und angewandte Mathematik. pag. 339.

(2) Parigi, 1895. Gauthier-Villars et fils. Capo I.°

Digitized by Google

degli oggetti ed è, secondo un nostro intimo convincimento, indipendente dall'ordine in cui si considerano successivamente gli oggetti dati ». In questo modo d'intendere l'origine del numero io stimo ci sia parte almeno del vero; perchè da un lato s'inchiude la funzione cogitativa del considerare, e dall'altro si parla di oggetti distinti, senza pregiudicare la questione coll'intromettere o lo spazio o il tempo: per cui è lasciato adito al sospetto che noi confermeremo, non forse e l'uno e l'altro vi possano concorrere insieme: rimanendo però sempre al tempo un diritto inalienabile.

Tolgo da un *Giornale di Matematica* le seguenti osservazioni le quali provano come sia tutt'altro che chiarita la questione che c'interessa.

Il prof. Giovanni Biasi ne' suoi " Elementi di Aritmetica e d'Algebra esposti con metodo sintetico „ scriveva: ".... allo studio delle grandezze posi innanzi una breve teoria dei numeri naturali; e siccome questi nella loro origine sono considerati da taluni come *indici d'ordine*, da altri come quantità o somme d'unità, tentai conciliare i due metodi. „ Gli si obbiettò: " Non risulta ben chiaro cosa l'autore intenda dire colle parole " indici d'ordine „ e " come quantità o somme di unità „: ma se avesse voluto dire, come pare possa rilevarsi dal testo, che

Digitized by Google

il concetto di numero può ottenersi da quello di ordine o da quello di successivo (insieme ad altri), allora avrebbe detto cosa non ancora provata, perchè non abbiamo una teoria del numero intero dedotta dal concetto di ordine, mentre abbiamo una completa teoria del numero intero dedotta dal concetto di successivo, della quale il concetto di ordine è conseguenza, dipendentemente anche dal concetto di corrispondenza univoca o reciproca „. (1)

Quell'inciso " insieme ad altri „ quasi a complemento di successivo, riesce oscuro: chè l'insieme allude piuttosto a coesistenza che a successione. Di più: mentre si dichiara non ancora provato il concetto di numero possa ottenersi da quello di successivo, poco dopo si afferma che c'è una completa teoria del numero intero, dedotta dal concetto di successivo. Di più ancora: che il concetto di ordine sia conseguenza della teoria del numero intero dedotta dal concetto di successivo, non par vero, perchè il concetto di ordine eccede senza fallo quello di numero.

Il concetto di ordine, escluso da quello di numero, si collega invece ed essenzialmente colla funzione del numerare, che implica una concatenazione assoluta la quale non si può in nessuna guisa inver

(1) Giornale di Matematica, diretto da S. Peano Marzo 1886.

Digitized by Google

tire, e non si può invertire perchè inchiude la serie temporale. Quando il bambino conta dall'uno al dieci, e poi dal dieci all'uno, c'è tutta l'apparenza di un tornare indietro rifacendo quasi un cammino percorso. Ma questa è un' illusione: in realtà il supposto ritorno sulla serie, è una nuova serie di successivi analoga alla diretta: il tempo non si può disfare.

Che poi l'ordine sia un caso particolare della numerazione, lo denotano anche le espressioni linguistiche degli aggettivi che appunto si dicono ordinativi: primo, secondo ecc., e che sono formazioni dirette del processo del numerare.

VI

Si cercò anche di pervenire ad un concetto convenzionale di numero, seguendo una via piana e seducente, ma che guida, secondo me, all'errore.

Si disse: un oggetto isolato, in quanto isolato, astrazione fatta dalla sua natura e dalla sua forma, prende il nome di *unità*. La riunione di più oggetti distinti, considerati in quanto distinti, senza preoccuparsi della natura e della forma loro, si chiama una *pluralità*. La pluralità la più semplice è formata da una unità, aggiunta a un'altra unità. In generale

Digitized by Google

si può formare una pluralità qualunque, aggiungendo una unità alla pluralità precedente. Le pluralità sono rappresentate per mezzo di simboli che si chiamano *numeri interi.* (1)

Come dissi, quest'è una convenzione; però sebbene nella convenzione l'intelletto goda del più largo arbitrio, essa tuttavia perde ogni valore ed è condannata dalla ragione, quando rinchiude un vizio logico: e viziata e insostenibile mi pare la convenzione in discorso.

Diffatti, in essa si assume come numero il segno rappresentativo della pluralità. Ma si domanda: e l'uno non è numero? Intorno all'uno e all'unità farò in seguito apposito discorso; qui bastano le osservazioni seguenti.

Se è numero il due, esempio più semplice di pluralità, è numero anche l'uno; perchè il due non è che l'uno aggiunto all'uno. Forse che il carattere del numero, la sua essenza, scaturisce dall'addizione, da un'operazione? No di certo, perchè l'operazione verte bensì sul numero e fa del numero suo oggetto, ma non è essa stessa un numero. Non solo l'uno è numero, ma sembra la giustificazione di ogni numero. Il numero 20 non avrebbe senso,

(1) E. Ballue, *Revue de Meth. et de mor.* Maggio 1894 pagina 319.

Digitized by Google

nè come simbolo, nè come realtà mentale, se non presupponesse i gruppi unitari che lo precedono 19, 18, 17 e così regredendo fino all'unità che ne è la radice. Intorno allo zero ci potrà essere questione: ma il pensiero si rifiuta a non considerare l'uno come numero. Quando io dico: *una decina* di persone ho nella mente lo schema di una quantità determinata e precisa, proprio come se dicessi due diecine o tre.

Inoltre si conviene di chiamare col nome di *unità* un oggetto, e col nome di *pluralità* più oggetti. Ma chi non s'accorge della *tautologia?* Se l'esigenza imprescindibile del pensiero mi suggerisce l'idea di un oggetto, perchè convenire di chiamarlo uno, dove non può esser che tale? Non è questione di lingua o di parole: è questione di mentalità necessaria.

Quando si fa una convenzione intorno ad una cosa, è implicitamente supposta la possibilità di un concepimento diverso, e per ciò si vuol raccogliere intorno ad essa i pensieri degli altri e costringerli ad un comune assentimento a scanso di male interpretazioni: ma qui non è il caso, perchè l'uno è uno per tutti.

E altrettanto dicasi della *pluralità,* nome con-

Digitized by Google

venuto di *più* oggetti. Tanto varrebbe convenire che più oggetti sono più: un giuoco che non ha senso.

Egli è che non si possono fare delle convenzioni arbitrarie, quando c'è di mezzo la necessità del pensiero. E il numero è troppo implicato, anzi vorrei dire organizzato nella costituzione stessa della psiche, per poternelo svellere e trattare a capriccio.

VII

Si è anche considerato il numero come segno degli oggetti. Tante unità sono segno di tanti oggetti: lo zero è il segno dell'assenza degli oggetti — È evidente, dice il Masci, che questa maniera di spiegare il numero, lo suppone; perchè il numero segno non sarebbe segno di nulla se non fosse del numero reale.

Ed io aggiungo: perchè il segno individuasse numericamente un dato oggetto, converrebbe fosse determinato e diverso dagli altri segni che individuano numericamente altri oggetti. Ma siccome codesti segni si possono scambiare e attribuire indifferentemente a questo o a quello oggetto, di guisa che non c'è oggetto a cui non possa competere ora, poniamo, il numero 5, ed ora il numero 7, si

Digitized by Google

ricade nella difficoltà insuperabile, già posta in luce, di considerare il numero come una qualità.

In generale, quando si vuol trovare del numero un fondamento esclusivamente oggettivo, s'incorre nel pericolo di scambiare il numero cogli oggetti numerati, e di applicare al numero, come tale, le proprietà che sono invece degli oggetti, come tali. E ne viene di conseguenza. di dover violentare l'empirismo esterno, costringendolo ad offrire ciò che non è omogeneo alla sua natura ed alla sua portata — Quando sopra un tavolo io scorgo degli oggetti, e li conto, e dico che sono 6, sono ben lontano dall' aver percepito il numero 6. Questa materializzazione del numero, questa tendenza a identificarlo coll' oggetto, accusa un grado bassissimo d'intelligenza, stretta da poveri confini. I Dammara, per es., non contano al di là di tre, e quando vogliono esprimere quattro fanno uso delle dita, e se debbono contare oltre cinque si smarriscono, perchè allora non hanno più una mano libera per tener ferme le dita che servono come unità: e gl' Indiani Zamuca e Muysca per cinque dicono *mano finita.* (1)

D'altronde, non si può negare che il numero

(1) Canestrini. La teoria dell'evoluzione esposta ne' suoi fondamenti, pag 163.

Digitized by Google

abbia tutta l'apparenza d'una suggestione immediata degli oggetti sentiti. Anzi codesta suggestione è parsa così spontanea e naturale che condusse a giudicare il numero "una proprietà primordiale e indefinibile„ degli aggregati di oggetti. (1)

VIII

Il Bain crede che il numero possa identificarsi colle interruzioni della coscienza. Oramai, egli scrive, non si sostiene più che il numero sia un'intuizione o una forma del pensiero di cui la natura ci abbia fornito *a priori*. Il numero è inseparabile dai nostri sentimenti: per il solo fatto che i nostri sentimenti sono interrotti e ripresi, sono anche numerati; e poichè la nostra coscienza è interrotta e funziona per transizioni da uno stato a un altro, essa è per ciò stesso coscienza del numero. — E avendo detto nella *Logica* che senza una *base concreta* noi non possiamo concepire nel nostro pensiero un numero qualsiasi, si arguisce che detta base è offerta dagli stati di coscienza. (2)

---

(1) Hoüel, Consid. elem. sur la generalisation succes. de l'idée de quantité, dans l'an. mathem. Paris 1883.

(2) I sensi e l'intell. tr. fr. Appendice 652, 663; Logica, Deduzione id, 365.

Digitized by Google

Anche lo Stuart Mill insiste sulla base concreta del numero; se non che la trasferisce dalla coscienza alle cose, e limita in tal maniera il concetto del Bain. Tutti i numeri, scrive per es., lo Stuart Mill, debbono esser numeri di qualche cosa: numeri astratti non ce ne sono..... Tutte le cose hanno una quantità, componendosi di parti che possono esser numerate e, a questo riguardo, possiedono tutte le proprietà dei numeri (1) — Io osservo che le cose possiedono le proprietà dei numeri fino a un certo punto, non però in assoluta corrispondenza; perchè nelle dimostrazioni della matematica superiore, si possono applicare al numero dei concetti che alle cose sono repugnanti e che accusano apertamente l'origine tutta mentale del numero; valgano come esempio lo zero e l'infinitesimo. Ma ritorniamo al Bain.

Egli, adunque, ritiene psicologica e soggettiva l'origine del numero; ma equivoca, mi pare, identificando la coscienza del numero colle interruzioni della coscienza. Infatti, le interruzioni della coscienza, che in seguito raccoglieremo nel principio fondamentale dell'impenetrabilità psichica, possono costituire la materia della numerazione; sono cioè il numerabile, ma non sono il numero. Perchè il numero

(1) Sistema di logica, tr. fr. Vol I.° pag. 291, 292.

Digitized by Google

esige una consapevole direzione del pensiero inteso a dei raccoglimenti e a delle sintesi, che sono il risultato di una speciale operazione del pensiero stesso, che più innanzi porremo in evidenza. Tanto varrebbe allora identificare col numero i corpi che sono distinti, interrotti, nello spazio. Ma nè la semplice coesistenza in questo caso, nè la semplice successione, che è il caso delle interruzioni, danno il numero, se si prescinde dal numerare, che è opera sua propria e riflessa del pensiero; danno delle moltitudini o nel tempo o nello spazio, ma non mai, ripeto, dei numeri.

IX

È universalmente accettata questa proposizione, che non sia possibile concepire l'idea di numero senza quella di unità. Ma è strano e pieno d'interesse anche questo fatto, che si parli, cioè, dell'unità come elemento del numero, mentre dell' assolutamente uno non c'è diretta esperienza, nè interna nè esterna: e l'unità più che originaria, sembra l'effetto di una riduzione del molteplice.

Poichè, a prescindere dal fatto che l'uno non è, se non è percepito o come corpo o come stato di coscienza, la qual cosa, quindi, richiede l'esistenza

Digitized by Google

e la presenza di un altro, che sia il percipiente, è certo che il nostro perenne ambiente è tutto nella molteplicità, così nel mondo della materia, come nel mondo dello spirito.

Il pensiero di un sol corpo nello spazio si annichila da sè stesso, perchè inchiude inesorabilmente il riguardante: e quand'anche a forza di faticose eliminazioni, mi riducessi alla pura contemplazione mentale dell'io, ed esclamassi: « ecco l'uno che io cerco » mi sarei illuso di un trionfo fallace; perchè a non lasciarlo sfuggire dalla forma di una conoscenza reale, avrei dovuto questo soggetto sdoppiarlo in io conoscente e in io conosciuto.

Però badiamo agli equivoci, e badiamo sopra tutto che il nostro ragionamento non isvapori in un vuoto sofisma. Ed ho bisogno di far qui questo appello, perchè tante volte la verità si nasconde davvero all'ombra del paradosso, ma se non ci teniamo in perfetto equilibrio sopra quel filo sottilissimo su cui siamo costretti a incedere, ci fiacchiamo, funamboli inesperti, l'osso del collo.

Ora, che l'uno esista come relativa o assoluta differenziazione dall'altro, che ci siano delle cose uniche nel senso di aver caratteri tali per cui sono distinte dalle altre e inconfondibili, non è chi non ammetta; e basterebbe pensare all'individuo, baste-

Digitized by Google

rebbe pensare alle opere del genio, che sfidano nella perpetuità del tempo ogni confronto, basterebbe pensare agli oggetti del cuore che la fantasia, ravvivata dall'affetto, può rendere tutt'uno coll'anima nostra.

Di più. Che il conoscente sia un presupposto immancabile, il quale però d'ordinario sparisce o s'immedesima nel conosciuto, e dal quale si prescinde quasi costantemente, è anche vero; come è vero che noi, rapiti nell'emozione estetica, possiamo obliare l'agile mano che scorre e saltella sulla tastiera del pianoforte. Ma quando si vuole penetrare nel fondo delle cose, esempio d'unità non si trova: di quell'unità assoluta, indipendente, che sta da sè, e che non si può direttamente cogliere e pensare, perchè insomma, il pensiero è essenzialmente rapporto e fuori della dualità non esiste.

Non m'intrattengo quì sui modi diversi di considerare l'unità, che matematici e filosofi hanno proposto. Voglio soltanto ricordare un pensiero del Taine, perchè darebbe ragione del mio punto di vista, già prima che lo rendessi palese. Egli dice che il carattere essenziale delle unità è l'attitudine a entrare *dans des collections* (1). — Ma è evidente

(1) Noël, *L'idée de nombre et ses conditions:* nella « Revue philos. Agosto 1886, pag. 175.

Digitized by Google

che se non si avesse il concetto della collezione, non si potrebbe affermare la parte che ha in esso

---

Per conto suo, l'unità essendo un carattere comune a tutti gli oggetti reali o semplicemente possibili, è meglio non cercare di definirla. Nell'interessante articolo, il Noël vuole dimostrare come l'idea di numero è inseparabile dalla rappresentazione di spazio. Critica specialmente Condillac che la ridurrebbe all'idea di tempo, e perviene alle seguenti conclusioni.

La concezione del numero implica quattro condizioni fondamentali. Pensare un numero significa:

1.° rappresentarsi delle unità,

2.° rappresentarsele come specificamente identiche,

3.° riunirle mentalmente in un tutto,

4.° riconoscere l'indifferenza dell'ordine in cui questa riunione è prodotta.

La prima di queste operazioni trova la sua condizione nella proprietà essenziale della appercezione: la seconda esige che una stessa rappresentazione possa essere riferita a più oggetti, ed esige inoltre che noi possiamo concepire le differenze così temporali come spaziali. La terza operazione esige specialmente la nozione del tempo; e l'ultima la nozione dello spazio.

Senza la prima condizione ci sarebbe impossibile di pensare delle collezioni: l'assenza della terza, per un'altra ragione, importerebbe la stessa conseguenza. La seconda e la quarta condizione sono più specialmente richieste perchè le collezioni diventino numeri. Se la seconda sola fosse soddisfatta, noi non avremmo ancora che delle serie, delle pluralità molto analoghe al numero, ma che ne differirebbero essenzialmente in ciò, che il loro modo di formazione sarebbe necessariamente unico e dato con esse. I veri numeri debbono al contrario concepirsi come suscettibili d'essere formati in diversi modi, ed è per questo che diventano possibili le operazioni dell'aritmetica. Quindi è che tutte e quattro le condizioni sovra espresse, sono egualmente indispensabili.

Lo svolgimento della mia tesi, porrà in luce come e quanto io mi discosti dal concepimento del Noël.

Digitized by Google

l'unità, nè l'attitudine che le si conferisce. La quale attitudine è un'astratta possibilità, il che significa che concreto è il molteplice, e l'unità è una riduzione, fatta dal pensiero, di esso.

Questa dell'unità è una *vexata quaestio,* che se d'altronde non si risolve, minaccia di trascinare il numero nel buio dell'indefinibile. E sono due gli aspetti sotto cui l'unità deve essere riguardata, come entità a sè e come costitutiva del numero. Ora, come diventa essa contenuto del pensiero?

Che non sia oggetto di percezione, lo dimostrammo; perchè sebbene applicabile al corpo esterno o allo stato di coscienza, essa, nella sua assoluta indifferenza, non è nè l'uno nè l'altro. Non è una astrazione: perchè su quali cose dovrebbe esercitarsi la virtù astrattiva della mente per riuscire all'unità? Sui corpi? Sugli stati di coscienza? No, per ciò che non sono della medesima categoria di essa. L'astratto, o per generalizzazione o per isolamento, potrà essere uno, ma non mai l'unità. Insomma, *il da cui astrarre l' unità* manca assolutamente, e per ciò l'unità non è un'astrazione.

Non è un concetto, perchè è priva di comprensione che evidentemente la escluderebbe o, in altre parole, la trasformerebbe in una reale molteplicità: e manca poi anche di estensione, perchè non può

Digitized by Google

esser predicato che di sè stessa, ossia non è riferibile che a sè stessa. Il fatto che ogni oggetto può avere a predicato l'uno, non vuol punto dire che l'estensione dell'unità sia infinita, e che quindi l'unità stessa possa venir considerata come una categoria. Perchè un oggetto non è una unità, se non in forza di uno special modo di considerarlo mentalmente: il qual modo essendo estrinseco all'oggetto stesso, perchè è soggettivo, non può esser predicato di esso: non potendosi, a nessun patto, predicare di una cosa, ciò che è funzione del pensiero.

Sarebbe l'unità, per parlare il linguaggio kantiano, una intuizione o empirica o pura? Non pare ammissibile, perchè la intuizione empirica si riferisce a un oggetto, e l'unità non è tale; e l'intuizione pura è la forma della sensibilità, a cui l'unità sfugge.

Come si vede, non è facile trovare il modo di conoscenza dell'unità e la forma del pensiero nella quale possa venire accolta: ad ogni modo, spiego le vele e navigo.

X

Parto da un dato primitivo e irreducibile che costituisce il modo di essere intimo ed essenziale

Digitized by Google

della materia e della coscienza: poichè le nostre spiegazioni, se non vogliamo impigliarci nell'assurdo di chi pretende d'arrivare senza mai partire, debbono distaccarsi da qualche cosa che sia veramente *primo*, e che racchiuda la possibilità, finchè si vuole remota, ma fondamentale, di esse. E il dato da cui io movo è primo, non perchè sia posto *a priori* dalla ragione pura, chè sarebbe questo un procedimento logico arbitrario; ma perchè la ragione applicata alle cose, lo trova come un fatto indeducibile da altro.

Parrà una contraddizione questa di ammettere, come oggetto della ragione, un fatto indeducibile da un altro: violandosi così il principio imprescindibile della causalità. Ma io osservo che la stessa ragione, cimentatasi attraverso i secoli col problema dell'essere e del conoscere, se per quello, o si è fermata a Dio o si è protesa lungo una serie di cause, infinita nel tempo e nello spazio, per questo ha dovuto inevitabilmente fissare un punto limite che fosse principio indimostrabile di dimostrazione.

Questo dato che io stimo il fondo d'esplicazione dell'idea dell'unità, dell'uno e conseguentemente del numero, idee colte nella loro genesi psicologica, è *l'impenetrabilità* fisica e psichica: dei corpi, nel mondo della materia, degli stati di coscienza, nel mondo dello spirito. Poichè, io non mi

Digitized by Google

preoccupo qui dell'intuizione monistica, in virtù della quale questi due mondi possano per avventura raccogliersi nella spiegazione dell'essere universale: sta il fatto che le rivelazioni fenomeniche dell'uno, sono diverse dalle rivelazioni fenomeniche dell'altro, e nessuna ipotesi monistica, pure feconda d'altre e molte e scientifiche illazioni, perverrà mai a persuadermi che io sono lo stesso oggetto che studio.

L'impenetrabilità si assume nel senso convenuto e ordinario della parola: ma bisognerà soffermarci alquanto a rilevare il suo valore rispetto ai corpi, e il suo valore rispetto alla coscienza; chè sono valori diversi, e per le entità che ne formano l'oggetto, e per le efficienze che rispettivamente ne derivano.

L'impenetrabilità, rispetto ai corpi, è coesistenza da cui si origina il concetto di Spazio: rispetto agli stati di coscienza, è successione da cui si origina il concetto di tempo. La coesistenza e la successione, sono due avvertimenti immediati della coscienza; non derivano da un pensiero riflesso che elabori un qualche dato sperimentale. Esse sono la manifestazione della stessa realtà, che diviene contenuto primitivo della coscienza interna ed esterna, tosto che l'essere fisiopsichico inizia la vita di relazione. L'attività mentale si esercita in seguito, allorchè

Digitized by Google

effettuando, per un sottile ed involuto processo di astrazione, il distacco dal pensiero di un contenuto percettivo attuale, interno o esterno, sostituisce e insinua nel pensiero stesso la possibilità di entrambi, ossia dello Spazio e del Tempo. Cioè, in ordine al nostro discorso, lo Spazio è l'impenetrabilità corporea pensata come coesistenza possibile, o meglio, come la possibilità della coesistenza; il Tempo è l'impenetrabilità psichica pensata come successione possibile, o meglio, come la possibilità della successione. Il concetto del *possibile* è, senza dubbio, una delle più importanti formazioni della mente umana: estende all'infinito la capacità del nostro pensiero, e, fra l'altro, il valore della scienza induttiva è tutto in esso e per esso.

La coesistenza e la successione sono due fatti diversissimi. Hanno, è vero, un'esigenza comune che consiste in un certo esser fuori di qualche cosa da qualche altra cosa: ma quell'esser fuori delle cose spazialmente tra loro considerate, non è l'esser fuori degli avvenimenti, psichici o storici, tra loro considerati. Parrebbe, volendo arrischiare un'idea esplicativa, che nel primo caso ci fosse un arbitrio, non consentito nel secondo. Tre oggetti che sono sul mio tavolo li posso disporre, senza mai compenetrarli, in mille modi; ma non posso neanche pensare che

Digitized by Google

il mio presente atteggiamento mentale preceda gli anteriori. Si sarebbe tentati a dire che il Tempo è successione necessaria, lo Spazio coesistenza libera. Inoltre, nel concetto della successione pare più intimamente implicato quello di causa e di forza che non sia nel concetto di coesistenza.

Ad ogni modo, non è opportuno che c'inoltriamo nella fitta selva di codesti problemi. Anche se non siamo riusciti a determinare la specialità delle differenze, noi ci limitiamo a tener ferma quell' esigenza comune quassù espressa e da cui si origina direttamente il concetto della discontinuità.

Il concetto della discontinuità trova il suo motivo nella percezione esterna ed interna. Quando di un concetto si afferma che ha motivo o causa o sorgente nella percezione, non si deve intendere che esso risponda a un'entità percettibile: egli è che gli oggetti della percezione si offrono al pensiero con modalità siffatte, che suggeriscono quel concetto.

Gli oggetti della percezione diretta, e vorrei dire semplice o singola, si riducono, in fondo, a due categorie: corpi o stati di coscienza. Ogni altra mentalità che vi si riferisca, troverà in codesti oggetti un' occasione, ma esige un' elaborazione del pensiero.

Il discontinuo non è contenuto di una percezione

Digitized by Google

diretta e semplice e singola: implica un rapporto, e come tale si accosta alla successione, o alla coesistenza, richiedendo la considerazione di più termini. Il conoscere è bensì sempre un rapporto; ma mentre nel caso più semplice il suo oggetto è singolare, si danno altri casi in cui codesto oggetto è una certa complessità; e mentre ivi il contenuto del pensiero è un'immagine rappresentativa, quivi diventa un insieme d'imagini che si fanno in certo special modo riguardare fra esse. Questo divario lo colse già Platone felicemente quando, nel suo linguaggio, affermò esserci delle idee che hanno un'essenza per sè stesse, ed essercene di quelle che non sono se non in rapporto ad altre idee. E noi diciamo che ci sono percezioni le quali esistono di per sè, ossia in ordine e in corrispondenza alla cosa percepita; ed altre che nascono, non in ordine alla cosa che sia loro corrispondente, che non c'è; ma da un'operazione del pensiero: di guisa che, insomma, la percezione del rapporto, anche se interceda fra corpi, non sia esterna, ma interna. Il rapporto non è dato direttamente dalla coscienza sensibile, perchè implica un, quanto si vuole rapidissimo, giudizio.

Come dell'impenetrabilità, anche della discontinuità si può considerare l'aspetto temporale e spaziale. Ma bisogna subito premettere che la que-

Digitized by Google

stione è doppia, per la duplicità degli aspetti che vi sono implicati. Io posso considerare il continuo nella estensione di un dato corpo, e mi risulterebbe che una superficie, per es., è continua; ma posso considerarlo rispetto alla totalità dei corpi contenuti nello spazio, e mi risulterebbe allora la discontinuità dello spazio. In altre parole, il luogo sarebbe continuo, lo spazio discontinuo, appunto perchè interrotto dai luoghi, che sono porzioni di spazio occupate dai corpi.

Ma anche la continuità del luogo sembra più apparente che reale. Infatti, ciò che costituisce il luogo, come dissi, è il corpo in quanto occupa uno spazio e perciò ne interrompe la continuità. Ma il corpo, alla sua volta, non è continuo perchè i suoi elementi sono disgiunti: si parla con ragione di uno spazio intermolecolare e interatomico, che esprime la possibilità della combinazione chimica. Ora, il fatto che ognuno di questi elementi occupa un suo luogo non occupabile da altro, esclude la continuità del luogo occupato dall' intero corpo. Una molecola rispetto al corpo di cui fa parte, è ciò che è un corpo rispetto all'universo; la differenza, se differenza c'è, è tutta nella proporzionalità. Se esistesse un animale ragionevole tanto piccolo, da potersi agitare tra le molecole di un corpo, come noi ci agitiamo

Digitized by Google

tra corpo e corpo, esso che per ipotesi potrebbe fare dei ragionamenti analoghi ai nostri, troverebbe il discontinuo proprio là dove noi troviamo il contrario. Dunque la percezione del continuo non è reale: è un caso speciale della nostra costituzione fisiopsichica.

I matemetici, che per le loro costruzioni tesoreggiano il concetto del continuo, per render possibile il numero frazionario e la divisibilità all' infinito, sono costretti ad *inventarlo* (1): ma non pare lo accordino poi col concetto fondamentale di *limite* (2) che mi piacerebbe chiamare l' elemento dell' impenetrabilità; il nemico che strozza il continuo non appena minaccia di essere.

---

(1) *H. Poincaré.* Revue de Metaph. et de Mor. Vol. 1.° pagina 29.

(2) *G. Veronese* Fondamenti di Geom. etc. 1891, pag. 48, in nota. Dopo d'aver discusso, da quel maestro che egli è, le opinioni del Cantor e del Dedekind intorno alla rappresentazione del continuo nello spazio, che egli sottrae all' efficienza del punto e del numero, e ripone nell' intuizione del continuo rettilineo mediante l'idea di punto senza parti rispetto al continuo stesso, scrive: « Il continuo rettilineo, non è mai composto de' suoi punti ma dei tratti che li congiungono due a due e che sono pur essi continui.

In questo modo il *mistero* della continuità, viene ricacciato da una parte data e costante della retta, ad una parte indeterminata, quanto piccola si vuole, che è pur sempre continua,

Digitized by Google

Dicemmo che il discontinuo del tempo non è il discontinuo dello spazio: entrambi però sono stretti dalla medesima necessità di venir pensati come parti o momenti rispettivamente estrinseci, fuori l'uno dell'altro.

Ma conviene stare in guardia, e sventare una insidia. Che il discontinuo possa parere e possa venir pensato come un frazionamento arbitrario, come un'accidentale partizione del continuo, si ammette: bisogna però tener fermo che dei due concetti l'uno soltanto è reale, quello del discontinuo; l'altro è potenziale: ossia, esprime la possibilità del pensiero di prescindere dell'intervallo. Ma guai, se poscia vogliamo trovare come cosa il pensiero.

Terrei altro discorso se cimentassi il concetto della continuità coi concetti di attività, forza, funzione e simili. Quì la continuità potrebb'esser data a titolo di fatto, e tradursi come tale in uno stato di coscienza

---

e dentro la quale non ci è permesso di entrare più oltre colla nostra rappresentazione. Ed è in questo mistero che si ravvolge in fondo il concetto fondamentale di limite. Ma matematicamente, è bene rilevarlo, questo mistero non ha alcuna influenza poichè ecc. ecc. ».

Dunque, a me sembra di poter aggiungere, sulla base di queste osservazioni, dunque il continuo matematico è un'ipotesi, dacchè non possiamo penetrare nel suo elemento, e non è quindi dato in nessuna forma della conoscenza.

Digitized by Google

continuo, ossia avente una durata (1). Ma si capisce: per quanto materia e forza si compenetrino, le loro manifestazioni sono diverse; e quindi le esigenze psicologiche riguardanti un processo dinamico, sono diverse da quelle che riguardano l'esteso corporeo.

Del resto, il mio modo di vedere apparirà anche più esplicito nelle considerazioni che sto per fare intorno ai concetti del finito e dell'infinito, che hanno pure col numero strettissima attinenza.

Dubito intanto se sia perdonabile audacia questa di rimescolare, quasi per incidenza, e collo scopo di fornire il terreno propizio ad una questione, problemi tanto ardui e che hanno storia lunga e complicatissima. Ma se mi sono lasciato e mi lascio prender la mano, egli è che sono convinto non potersi oramai discutere con qualche interesse una questione filosofica, se prima non sono gettate profonde le basi. Dopo tutto, il partire da lontano è il minor guajo; arrivare è quello che importa. Nè io d'arrivare felicemente m'illudo; ma non vorrò almeno pentirmi di non aver tentate le vie che, sebbene tortuose, a me pareano più adatte.

---

(1) Ho discusso il concetto di durata, specialmente ne' suoi rapporti coll'identità personale, nel mio studio: La dottrina della memoria in Francia nel sec. XIX. Palermo, Barravecchia, 1893.

Digitized by Google

Il finito è reale, l'infinito è una possibilità astratta. — Logomachie, giudicherà qualcuno, battaglia d'ombre! L'infinito ci signoreggia e ci stringe da ogni parte, nello spazio e nel tempo: è la radice e la ragione stessa dell'essere — Ebbene, io insisto; questo infinito che come soggetto sfugge alla definizione perchè non comporta predicati reali, potrà di molti soggetti divenir predicato: ma come si pensa? Si pensa come una continua integrazione del finito. Ora, l'integrazione del pensiero operata sul finito, per quanto possa estendersi, non si estende mai all'infinito attuale. In vero, quella stessa virtù cogitativa che integrando il finito lo estende, non perviene mai ad un punto che sia limite assoluto delle sue integrazioni; e che non possa invece essere punto di partenza ad altre integrazioni succedentisi senza tregua. Ma che cosa sono queste integrazioni, in fine, se non la ripetizione dello stesso atto mentale concernente la realtà concreta e limitata?

Da ciò appare manifesto che l'infinito non è delle cose, bensì del pensiero, conscio di sè stesso; conscio voglio dire della sua attività, conscio che nessuna integrazione è mai limite, conscio che la ripetizione di sè stesso può durare incessantemente. L'infinito, adunque, non è un atto, è una forza, la cui possibilità astratta di attuarsi è infinita.

Digitized by Google

C'è, per es., chi sostiene la concepibilità attuale di una linea infinita; a patto però che non si concepisca sotto le condizioni della quantità. (1) Ma sotratta la linea alla quantità e quindi alla possibilità della misurazione, è un'idea che svapora, e nessuno artificio di parole varrà a farne il contenuto di un pensiero reale.

Quando s'invoca l'infinito come principio di essere, si soddisfa più che altro un' esigenza logica del pensiero in ordine al principio di causalità, ma non si afferra un reale: l'oggettività dell'infinito sarà problema eternamente insolubile.

XI

Or dunque, dal fatto irreducibile dell'impenetrabilità, noi abbiamo veduto sommariamente svolgersi come concetti reali ed oggettivi la coesistenza, la successione, la discontinuità, il finito: e rispettivamente, come astrazioni ideali e soggettive lo spazio, il tempo, il continuo e l'infinito. Ma in che rapporto stanno questi concetti e queste astrazioni col numero, e primieramente coll'unità che era l'obbietto della nostra ricerca? Lo vedremo: qui non posso esimermi dallo scivolare un poco sulla storia e sulla critica.

(1) V. nel Mind, del 1886, Aprile, un articolo del Fullerton.

Digitized by Google

Kant considerava il numero come una forma *a priori* dell'intuizione pura; ma forma, a dir così, secondaria, perchè lo faceva rientrare in quella fondamentale del tempo: e l'aritmetica sarebbe stata per lui la scienza a priori del tempo, la geometria la scienza a priori dello spazio. Ora, mentre per es. lo Hamilton e lo Zeller vi si accostarono, il Sigwart e il Wundt aggiunsero il movimento, Baumann e Ievons esclusero il tempo.

A me sembra che tanto sia vana quell'inclusione, quanto illegittima questa esclusione. È vana quell' inclusione e quell' aggiunta, perchè il contributo del concetto di movimento al concetto di numero, è tutto quello, nè più nè meno, che può dare il concetto di tempo; non essendo possibile spiegare il concetto di movimento, senza quello di tempo. D' altra parte, il concetto del tempo io lo trovo indispensabile al concetto di numero per questa ragione, che la funzione del numerare, implicante - si necessariamente nel tempo, precede il numero e lo forma esplicandosi. Il fatto che io posso pensare, poniamo, tre proprietà di un corpo, non implica il tempo, come non implica neanche lo spazio. Ma questo fatto del pensiero è posteriore alle originarie condizioni psicologiche dell'idea di numero. Fissato ch' esso sia in una forma concettuale, il

Digitized by Google

numero non esige più il tempo per essere applicato alle cose, assumendo carattere di perfetta immobilità. Ma il tempo, a chi ben guardi, è sottointeso e presupposto, tanto quanto ogni numero sottintende e presuppone la numerazione.

Tutto ciò farà parte di future discussioni: qui volli toccarne per giustificarmi di non aver parlato del movimento, a proposito del numero, bensì del tempo e di quegli altri concetti. Coi quali, giova fin d'ora annunziarlo, il numero non coincide già, ma ha attinenza, più o meno vicina, nel senso che trova in essi materia e provocazione alla propria genesi mentale.

XII

Ho appena bisogno di osservare come dall'impenetrabilità fisica e psichica spunti immediatamente la nozione di molteplicità. Ma la molteplicità non è il numero, e tanto meno un numero. E ciò per la ragione che gli elementi del molteplice, o corpi o stati di coscienza, sono sempre una certa qualità differenziata: mentre l'elemento del numero, è indifferenziabile.

Stimo non si possa pervenire al pensiero di unità se prima non si è determinato il concetto

Digitized by Google

dell'uno: e questa determinazione si ottiene forse ragionando in questa maniera.

Se noi contiamo i termini di una molteplicità, uno di essi è primo, un altro è ultimo. Ma il primo e l'ultimo e gl'infrapposti aggettivi ordinativi, non hanno valore assoluto rispetto allo spazio; lo hanno rispetto al tempo per una ragione già detta, la quale è che la successione è necessaria e non invertibile, mentre non è tale la coesistenza. Un corpo qualunque fra molti, può essere considerato come primo e come ultimo: per gli avvenimenti interni o esterni, la concatenazione è fissa; il prima e il poi non ammettono reciprocanza di sorta.

Però, nell'atto che si effettua la serie numerica ordinativa, anche gli oggetti coesistenti nello spazio, partecipano della medesima proprietà dei successivi: poichè sebbene io abbia l'arbitrio di cominciare da uno qualunque di essi, quando un altro fu considerato secondo, e un altro terzo, e un altro quarto, non possono questi, nella stessa serie, scambiarsi. Da ciò risulta che ogni numerazione concreta ed effettiva ha un limite. È chiaro, infatti, che se nel numerare ordinatamente cogli aggettivi primo, secondo, terzo ecc., una molteplicità di oggetti, non tenessi fermo per ciascheduno il suo posto, la serie non si raggiungerebbe mai. Ora il limite è l'*uno*,

Digitized by Google

non come unità numerarica, ma semplicemente come mentalità individuata nell'oggetto e identificata con esso.

Dico che quest' uno - limite non è l' unità numerica, perchè senza contraddizione o tautologia, lo posso dire di un corpo, di uno stato di coscienza, e della stessa unità. Esso è ancora l'oggetto considerato come un limite, l'oggetto con tutte le sue pertinenze raccolte nel fatto della percezione: ed avrebbe per suo correlativo l'*altro,* non come *due,* ma ancora e sempre come uno.

Quest' uno è l'elemento del rapporto, una specie di residuo, al di là del quale non c'è più essere quantitativo, c'è lo zero che ne rappresenta appunto la negazione. Io osservavo, più indietro, che la nostra vita è tutta nella molteplicità: quindi limitazione da ogni parte; l'uno è il limitante. Nel suo aspetto originario, esso appare come il principio d'analisi, il punto di partenza nella risoluzione di un molteplice: e perciò, nella serie numerica, occupa il primo posto. Ma non è un numero in sè stesso, come qualunque altro numero; è tale solo, quando comincia la funzione del numerare.

Mi giova insistere su questo punto, e per chiarire il mio concetto, e perchè abbia a risaltare netta e precisa la differenza tra l'uno e l'unità, e

Digitized by Google

non s'annebbî e svanisca in una vuota questione di parole.

Nella serie dei numeri interi, uno d'essi qualunqne suppone l'uno: e mentre nessun numero avrebbe valore senza l'uno, esso che è anteriore al processo del numerare, sta da sè; non s'intende, come quantità numerica, che questo carattere lo assume per la numerazione che inizia, ma come il fatto o la cosa a cui verrà applicata la numerazione.

In verità, quando si presume di numerare, poniamo, degli oggetti, non sono gli oggetti numerati, ma è sempre l'uno che si conta, riferito a questo o a quello. Infatti il due non è che un altro nome dell'uno, e significa precisamente l'uno preso insieme ad un altro uno; il tre è l'uno preso insieme ad un altro uno, e a un altro uno ancora, e così via dicendo.

Egli è perciò che tanto apparisce legittimo, improntare del carattere di oggettività l'uno, quanto sarebbe assurdo ritenere oggettivo un altro numero qualunque. E che non siano gli oggetti in realtà contati ma l'uno, lo si desume anche da ciò, che nel processo del numerare, si vanno facendo nel pensiero delle sintesi sempre più comprensive, non riferibili in nessuna guisa agli oggetti, ma sempre al pensiero dell'uno. Non sono, voglio dire, sintesi

Digitized by Google

di oggetti quelle che s'inviluppano nel processo del numerare, ma sintesi di pensieri dell'uno.

Come osservai alla sfuggita, un valore numerico all'uno è dato dalla numerazione: ma qualche cosa è già prima di essa. Vorrei offrire un esempio in cui apparisse ciò che è l'uno nella numerazione, e ciò che è fuori della numerazione.

Debbo dare a un tale degli oggetti, che non so quanti siano, e gli dico: prendi, questo è uno; e lui: "uno„: quest'è un altro; e lui: "due„; quest'è un altro; e lui: "tre„ quest'è un altro; e lui: "quattro„; e così via, poniamo, fino a dieci. Per me il *questo* è sempre uno; per lui invece quest'uno che viene successivamente ad occupare un posto nella serie numerica, piglia il nome di due, di tre, di quattro ecc., restando assorbito in totalità successive che si arrestano al dieci. Badiamo "piglia nome„ ma non già che non resti quello che è: una parola non ha virtù trasformatrice dell'entità mentale. Se non che, ripeto, quest'uno con cui io principio a dare, e lui comincia a ricevere e a numerare, ha un senso diverso: per me è un qualunque, per lui è principio della serie, ossia un numero; ciò che per me è oggetto e nient'altro che oggetto, per lui è numero.

Da quanto si disse risulta, e io non ho che

Digitized by Google

da rilevarlo, che l'uno si è preso in un' accezione concreta, in quanto cioè si predica della cosa, e fa anzi tutt'uno colla cosa prima che la numerazione cominci. E il numerare è un fatto proprio del pensiero, che prima si vincola all' oggetto e poi se ne svincola, divenendo la possibilità astratta del numerare in cui all' uno, che rimane pur sempre principio di numerazione, subentra, nel meccanismo delle operazioni, l'unità.

XIII

Tuttavia prima di compiere questo passaggio dal numerare concreto al numerare astratto, bisogna un po' scoprire d'onde venga al pensiero la provocazione a numerare. Poichè noi abbiamo cercato di determinare l'uno; e per necessità di prova fummo costretti a presupporre la funzione del numerare, affinchè apparisse dal confronto cogli altri numeri, che l'uno è numero solo quando e in quanto essa comincia.

Ma ora, adunque, se è la funzione del numerare che fa dell'uno un numero, bisogna si cerchi come essa si sprigioni dall' attività del pensiero. Della quale attività del pensiero non bisogna fare abuso, quando si vogliano esplicati i fenomeni del

Digitized by Google

mondo interiore, perchè si corre facile rischio di dar corpo alle ombre, di scambiare l'ideale col reale, e di non venir mai a capo di nessuna soluzione gnoseologica.

E c'è una filosofia che di quest'attività abusa, ritenendola elaboratrice occulta e misteriosa di quanto è nell'intelletto e non si sa all'esperienza ricondurre: ma io non la seguo. Per me esiste un'attività del pensiero, però non pura e impenetrabile: i suoi effetti sono stimolati dall'esperienza.

L'esperienza e, vorrei dire, la materia stimolatrice della funzione del numerare è interna.

Mentre a suggerire l'idea dell'uno sarebbero sufficienti la rappresentazione del corpo nello spazio e l'impenetrabilità fisica, a stimolare e a suggerire la numerazione son necessarie la rappresentazione dei successivi e l'impenetrabilità psichica.

Già uno stato di coscienza (e sono gli stati di coscienza che si svolgono essenzialmente nel tempo) è tanto estrinseco al pensiero, quanto un fatto qualunque del mondo esterno. Anzi degli stessi fatti esterni è la coscienza veicolo al pensiero: se non che in questo caso il riferimento del pensiero è spaziale, in quello temporale: e per ciò lo stesso oggetto può esser considerato come corpo, e come stato di coscienza nella rappresentazione mentale

Digitized by Google

che ce ne formiamo. Al qual proposito molte e sottili disquisizioni si potrebbero fare, che il mio tema però non esige: basti porre che il fatto di coscienza può essere rispetto al pensiero obbiettivato e divenire del pensiero contenuto.

Or dunque, l'avvenimento interno del successivo, che è un fatto originario inerente alle manifestazioni della coscienza, cadendo sotto la riflessione, traduce e rispecchia nel pensiero una certa disgregazione o discontinuità non immobile, ma distendentesi, se così potessi dire, lungo una linea di moto. E il pensiero che segue questo moto interno ne fissa i momenti, che sono dati dalla diversità degli stati successivi: poichè se fosse un medesimo stato che dura, la successione diverrebbe inconcepibile. Questi momenti segnati o fissati dal pensiero, nel loro primitivo aspetto, nella loro immediata rivelazione, sono un *prima* e un *poi*. Ma il prima e il poi non sono la numerazione che, tutt'al più, fino al due; numerazione circolare, come si vede, rientrante in sè medesima e sfuggente alla serie. Però continuando il pensiero da un momento dato come *primo* a fissare gli altri *poi* e a nominarli, acquista la possibilità di numerare all'infinito.

Questa sorgente interna del numerare non è in antitesi col fatto che noi, come sembra, comin-

Digitized by Google

ciamo a numerare gli oggetti esterni; perchè la possibilità di tale numerazione dipende da ciò che gli oggetti si assumono nella forma di un avvenimento interno.

Voglio dire che numerando, la molteplicità spaziale diventa serie temporale, non potendo essere che il pensiero che fa di un oggetto un numero. In altre parole, l'oggetto, considerato nella sua veste di numero, perde il proprio carattere spaziale e diventa un *poi* rispettivamente a un dato *prima,* ossia diventa l'elemento di una serie temporale.

C'è senza dubbio, una provocazione esterna del numerare, ma occasionale e lontana: e spunta non dall'oggetto come tale, ma dalle differenze che corrono tra gli oggetti. L'avvertimento che una cosa è altra da una data, può essere stimolo all'attività del pensiero dispiegantesi nella direzione del numerare; ma d'altronde queste differenze si traducono in istati di coscienza, dove completano il loro reale fondamento; e così ritorniamo alla sorgente interiore.

La quale non sottointende, giova bene notarlo, nessun *a priori,* perciò che non si rimena in modo diretto all'esperienza esterna. L'esperienza c'è ugualmente intera, e valida come l'esterna e più che

Digitized by Google

l'esterna; se non che il pensiero l'attinge dalla coscienza.

Che se poi s'insistesse a chiedere come questa materia, che il pensiero elabora e volge a' suoi fini, possa far parte della coscienza, risponderei che bisogna bensì ricorrere all'esperienza esterna o, se si vuole, alla percezione degli oggetti: ma ripeterei anche che gli oggetti, in quanto percepiti e rappresentati, divenuti cioè un contenuto della coscienza, hanno finito di essere rapporti spaziali e divengono rapporti temporali — Ciò non toglie evidentemente che non possiamo i corpi pensarli nello spazio; anzi come corpi o estensioni, questa forma di pensabilità la inchiudono necessariamente; ma come pensieri, o contenuti di pensiero, torniamo daccapo.

Dico, adunque, che il pensiero da un momento dato come primo, fissa i poi e li nomina, e così numera costituendo una serie indefinita: ma non voglio intendere che il numero sia così un nome e nient'altro. Il nome è bensì necessario per fermare i successivi della serie che si viene svolgendo, ma non è sufficiente ad esaurire il contenuto psicologico dell'idea di numero.

Quando si afferma un qualunque numero, si allude ad un riferimento di esso ai precedenti — Ogni numero è un momento del numerare che suppone

Digitized by Google

gli anteriori momenti: i quali possono anche apparire distinti quando si tratti di piccoli numeri, come sino al tre o al quattro: ma poi si confondono e non si discernono più. Però anche in questo caso un valore al numero è sempre conferito dal riferimento in discorso; altrimenti non ci sarebbe senso nel dire che il quattro è un numero piccolo e il mille un numero grande.

Di ogni numero si può dire che è maggiore del precedente e minore del successivo: e l'algebra adopera convenuti segni che sono significativi di codesta proprietà. Della quale quando si voglia trovare la ragione psicologica, bisogna ricorrere alla percezione temporale o dei successivi, come per trovare la ragione psicologica del più e del meno delle grandezze estese, converrebbe ricorrere alla percezione spaziale.

In virtù di questo riferimento regressivo, che si sviluppa da ogni numero, man mano che la serie procede, la funzione del numerare apparisce discreta e continua nello stesso tempo: discreta in quanto ogni numero ne determina un momento; continua in quanto questo stesso numero sviluppa dei rapporti retrospettivi cogli altri numeri, per cui tutti sono vincolati insieme. Proprio nell'atto in cui la funzione del numerare par che s' interrompa nel

Digitized by Google

numero formato, stabilisce la sua contiuuità. Come se si dicesse, che gli anelli di una catena si distinguono l'uno dall'altro, proprio nel punto in cui l'uno si congiunge con l'altro per formare il nesso continuo della catena.

E di quì anche apparisce che il numero non è soltanto la ripetizione dell'uno; ma, inoltre, un indice del risultato di codesta ripetizione. Per ciò, quelle teorie che fanno consistere il numero nella ripetizione o della sensazione o dello stato di coscienza, sono imperfette: perchè la ripetizione non è data nella forma della sensibilità interna od esterna, ma dalla virtù sintetizzatrice del pensiero. Non è un dato la ripetizione, è un giudizio.

Dunque la funzione del numerare è provocata e sorretta dal modo psichico della successione: il modo della coesistenza farebbe cristallizzare il pensiero nell'uno, o se si vuole anche nel molteplice, pensato però come una totalità, non mai come una serie.

Io non ho bisogno di richiamare il lettore al mio tema, e di ricordargli che tutto questo lavorio che ci siamo ingegnati di scoprire, si riferisce ai momenti primitivi della formazione psicologica del numero. Una volta stabilita la possibilità psicologica del numerare e del numero, entrambe ricadono nei

Digitized by Google

dominî di quell' industria logica che costituisce il pensare aritmetico. E siccome il pensare aritmetico, si raccoglie in una moltitudine di operazioni, le quali tutte astraggono dall' applicazione attuale del numero a un oggetto o a uno stato di coscienza, e non vi suppongono come sottostante che l' unità assolutamente indifferenziata e indifferenziabile, è necessario che di questa teniamo finalmente discorso.

XIV

Se il pensiero che corre dietro, per conservare la nostra metafora, ai successivi nella coscienza, prescinde dalla loro specialità di essere contenuti della coscienza e quindi determinati, esso si trova ad avere per obbietto nient'altro che il succedere degli atti suoi, ogni *uno* dei quali è l'unità che cerchiamo.

Ecco l' uno limite, di cui parlammo, far capolino, e determinare quantitativamente la stessa unità, come nel pensare e nel numerare concreto, aveva determinato il corpo e lo stato di coscienza.

Ed ecco anche manifeste le differenze tra l'uno e l'unità: questa è l'effetto di una riduzione che il pensiero ha compiuto del suo contenuto, e in virtù della quale non è rimasto che sè medesimo come atto: quello s' intrinseca nell' atto stesso del pen-

Digitized by Google

siero, come esigenza di limite, ossia come principio di discontinuità e di numerazione.

Se potessi con una immagine avviare al concepimento più chiaro di questa differenza, direi che nel caso dell'uno, noi assistiamo ad una suonata di pianoforte a orecchi aperti: nel caso dell'unità assistiamo alla suonata (detta così impropriamente) a orecchi chiusi. Ivi c'è, a così dire, un atto col suo contenuto; quivi un atto che di contenuto è mancante.

Non è da obliare mai il principio, che abbiamo assunto come fondamentale, della impenetrabilità: la quale nella stessa guisa che accampa i suoi diritti rispetto alla esplicazione della coesistenza e della successione concreta; li accampa anche rispetto alla coesistenza e alla successione astratta. Perchè gli atti del pensiero, che sono continui ed indivisi in sè stessi, sono poi tutti l'uno fuori dell'altro, ossia discreti, nella funzione del numerare astratto.

L'unità così concepita, cioè come momento del succedere puro, o atto del pensiero nel tempo, non è qualche cosa di determinato che affetti la coscienza, vi si organizzi, persista, e possa risorgere con un suo tratto caratteristico. Se fosse tale sarebbe un'entità originariamente differenziata da tutte le altre analoghe; nel qual caso non si potrebbe applicare

Digitized by Google

indifferentemente, e con ragione d'identità, a qualsiasi cosa.

In ciò, lo dico qui per incidenza, consiste una ragione del valore universale ed assoluto delle verità aritmetiche.

Poichè, sottratta l'unità al mutabile giuoco degli stati di coscienza, e ripostala nell'atto del pensiero, come tale sempre identico a sè stesso, nel meccanismo, di cui fa parte, delle operazioni aritmetiche le quali tutte la suppongono, essa conserva una significazione inalterabile.

Applicando all'unità il processo generico della numerazione, si ottengono i numeri astratti, sorretti dal simbolo, la cui potenzialità è infinita.

Dissi *generico* il processo della numerazione perchè, sia applicato alle cose, sia applicato all'unità, inchiude sempre quei modi e quelle esigenze di cui abbiamo discorso, e che si possono riepilogare in questa maniera: Ogni numero formato suppone una serie di precedenti di cui è un raccoglimento: e questi precedenti, originariamente, e nella loro forma psicologica, altro non sono che i successivi o della coscienza o del puro pensiero, colti e seguiti dalla riflessione, che ne ha fissato uno come primo.

Digitized by Google

XV

Ed ora, veniamo a constatare come le osservazioni già fatte intorno ai concetti di spazio, tempo, continuo e infinito, si riferiscano al numero; anche nella fiducia, che se qualche ombra si fosse quà e la addensata, dilegui.

Il numero è una certa coesistenza di unità. A dir vero, non è coesistenza spaziale, e nemmeno temporale, perchè ove si tratti di grandi numeri, non sono mai discernibili le unità sottostanti e coesistenti: di qui, anzi, la necessità dei segni che le rappresentino e le sostituiscano nel meccanismo delle operazioni.

La coesistenza delle unità nel numero è un sottinteso del pensiero, una specie di finzione, di memoria inconscia, che si realizza nelle operazioni a cui il numero può sottoporsi; come, per es., nella divisione. Quando io penso e dico 12, non discerno, e non è necessario, perchè esso sia entità numerica, che discerna le raccolte sottostanti unità; le quali si sprigionano da esso quando lo divida poniamo, per 4, e poi per 2, e poi per sè stesso. Sotto questo riguardo, ogni numero è una potenza la cui

Digitized by Google

estensione, o sfera d'azione, è determinata dalle unità che comprende.

La coesistenza delle unità nel numero, è adunque disgregabile e risolubile; anzi, fuori di questa ipotesi, non che la divisione nessun'altra operazione aritmetica sarebbe possibile. L'addizione $3 + 4 = 7$, significa la composizione in un sol numero o gruppo omogeneo di due gruppi unitarî simboleggiati dal 3 e dal 4 — E qui giova, sia pure per incidenza, notare che non è il simbolo che costituisce la materia del pensare matematico, ma l'entità mentale dal simbolo individuata. Il simbolo sta al numero, come il nome a un concetto logico qualunque.

Se ho assunto il concetto di coesistenza spaziale a proposito del numero, si fu perchè nella coesistenza, e quindi molteplicità, poteva trovarsi un remoto stimolo alla formazione dell'idea di numero. Ma io non ritengo che a questa idea i rapporti spaziali siano indispensabilli. Nell'ipotesi, d'altronde inverificabile, d'un mondo puramente psichico, a esclusivo contenuto di successivi, credo che il numero troverebbe sufficienti condizioni di esistenza.

L'importanza della successione apparve sopratutto capitale dai discorsi che siamo venuti facendo.

Però questa spiegazione del numero mediante

Digitized by Google

il tempo che non è nuova, ma che ho cercato di riaffermare partendo da nuovi punti di vista, trovò delle forti obbiezioni, che non è lecito pretermettere, perchè sono geniali e profonde. (1)

Si disse: " Certamente il numerare accade nel tempo, ma anche tutte le altre attività psichiche hanno la forma della successione. D'altra parte è inesatto che ogni grandezza numerica sia una grandezza nel tempo, perchè anche le grandezze spaziali possono esser numerate „.

A me parrebbe che l'attività psichica del numerare si distinguesse da tutte le altre cadenti nel tempo, in ciò che il pensiero la subordina a sè fissando un dato momento del succedere e sintetizzando con esso gli altri. Siffatte sintesi mentali vengono ad esser tutte diverse, a dir così, d'intensità, poichè in esse rientra a far parte un altro momento sempre nuovo. In questa progressiva sintetizzazione, che ha per principio e fine l'unità consiste, a mio credere, una specialità caratteristica della funzione del numerare.

Anche l' attività psichica del rappresentare piglia forma della successione; ma è una successione libera e non predeterminata, in cui il poi non fa necessariamente sintesi col prima. Io posso pensare

(1) Masci loc. cit.

Digitized by Google

come successive le rappresentazioni A B C: ma in questo pensiero non c'è nulla di necessario, e posso ammettere che avrebbero potuto presentarsi nella serie A C B. Ma quando numero fino al tre dicendo: 1 2 3, la successione così ordinata è necessaria; e sarebbe contraddittorio che pensassi il 3 prima del 2, ossia una sintesi prima dell' elemento che la costituisce.

Ecco, adunque, un'altra specialità della funzione del numerare, consistente in ciò che la successione vi è determinata in modo necessario: per cui il numerare s'intrinseca nel tempo che non ammette ritorni o regressioni di sorta. E mentre le altre attività psichiche, della successione hanno semplicemente la forma, questa del numerare partecipa della medesima natura di essa.

Il fatto poi che le grandezze spaziali possono esser pure numerate, cercai di spiegarlo osservando che nella numerazione esse perdono il carattere spaziale e assumono il temporale. Come grandezze o estensioni o corpi sono nello spazio, come numeri sono o dovettero essere successioni.

Si disse inoltre: "La serie temporale e la numerica non coincidono: l'una è continua, l'altra è discreta: questa è un aggiungere e procede per balzi; quella è un durare e non ha soste: l'una

Digitized by Google

è considerata in una sua parte, maggiore o minore che sia, come presente: l'altra non può in nessuna sua parte non apparir successiva „.

Che le due serie non coincidano, è certissimo: quantunque, come dimostrai, anche la serie numerica implichi da ogni suo momento o numero, un riferimento necessario ai numeri precedenti, nel quale si adombra la forma della continuità. Ma anche non coincidendo colla temporale, la serie numerica s'impiglia in essa, perciò che è una successione che non potremmo comprendere se non della natura del tempo — E mi pare, che di ogni parte delle due serie, si possa egualmente dire che è presente e successiva. Il numero, nella propria serie, è come il momento pensato nella serie del tempo: sono cioè, il numero e il momento, un qualche cosa di presente, di attuale che inevitabilmente suppone il proprio nesso coll'anteriorità, e quindi la possibilità futura di essere.

Del resto, quando affermo che il numero s'involge nel tempo, non intendo che il numero sia il tempo e che il numerare sia nient'altro che l'accadere: questa identificazione la escludo. Ma ammetto, d'altra parte, che il numerare sia qualche cosa di più, rispetto al tempo, che una semplice funzione che si compie in esso e da esso separata e distinta. Il

Digitized by Google

numerare è una subsunzione che il pensiero fa dei momenti del tempo: e non solo è nel tempo, ma del tempo, che costituisce il sostrato dinamico sovra cui esso si esercita. Il numerare è il tempo che si distingue in atti del pensiero. Non c'è fra il numerare e il tempo un rapporto semplice di contenuto a contenente, ma una compenetrazione tale che ha permesso perfino l'inversione della causalità: poichè se ci fu chi ha spiegato e spiega il numero col tempo, ci fu anche chi ha spiegato il tempo col numero.

Il tempo, si aggiunse, considerato come continuo è una grandezza e perciò diventa numerabile: non è il tempo, ma la grandezza nel tempo che è concepita mediante il numero, per ciò non può il numero esser concepito mediante il tempo.

Ma a me sembra che il fatto di poter essere il tempo considerato come grandezza numerabile, non escluda in modo assoluto la concepibilità del numero mediante il tempo. Non sono numerabili gli stessi numeri? Ma allora non più considerati nel modo di loro formazione, chè il circolo sarebbe evidente, bensì come oggetti o segni: 20, 30 40 sono 3 numeri.

Io forse m'inganno, ma crederei che la tendenza a considerare il tempo come estraneo al nu-

Digitized by Google

mero, derivasse dal considerare il numero più nella sua entità logico-matematica, che nella sua specialità di formazione psichica: e derivasse anche da ciò che la numerazione di pochi oggetti nello spazio, per la rapidità istantanea con cui si compie, ha tutto il carattere d' una percezione immediata.

Quando io penso al numero 20, ho un concetto il quale, in sè, non è altro se non un complesso di unità, che per esser pensato non suppone nè lo spazio, nè il tempo, nè altra condizione imaginabile, all' infuori dell' attenzione che lo ferma e lo sorregge dinanzi alla virtù contemplativa del pensiero. Intendiamoci; non suppone il tempo come elemento della sua pensabilità, lo implica soltanto come condizione generica, per cui ogni pensiero cade necessariamente nel tempo. Ma se considero il numero 20 nella sua genesi, nella sua storia psicologica, come un effetto dell' aver numerato dall' uno sino al 20, esso mi si presenta come il termine di una serie di successivi, che si svilupparono dalla stessa funzione del numerare e che s' identificarono coi momenti del tempo. Del numero, come concetto logico, accade il medesimo di tutti gli altri concetti, che cioè quando si assumono quali elementi di un raziocinio qualunque, non si tien più conto del modo di loro formazione psicologica, e di quel lavorio psi-

Digitized by Google

chico e mentale a cui hanno dovuto sottostare per divenire concetti.

Non insisto più su questo dibattito, al quale mi invitò il sereno amore della ricerca: esso avrà servito, forse, a chiarire il mio pensiero, che ora affido alla critica altrui.

I concetti del discontinuo e del finito, coi loro opposti, sono involti nel numero. Il numero è discreto: questa verità è universalmente acconsentita. Bisogna però eliminare un equivoco a cui potrebbe dar luogo l' espressione verbale.

Discreto è veramente il processo del numerare: chè il numero in sè stesso non è nè discreto nè continuo, non potendo questi due predicati competere a cosa che non ha estensione veruna nè spaziale nè temporale. Applicata la discrezione al processo del numerare, essa significa che fra l' uno e l' altro numero della serie che si va componendo, non esiste neanche la possibilità d' interpolare una *quantità* qualsiasi. Tra l' uno e il due non c' è l' abisso dei numeri frazionari, perchè in tal caso il due non si raggiungerebbe mai.

Il numero frazionario è sempre in virtù e per forza del numero intero, che geneticamente lo precede: ed è una esigenza logica insieme e matematica

Digitized by Google

che la funzione del dividere non possa effettuarsi, se non in quanto sia dato anteriormente l' intero dividendo. Fra il numero intero e il numero frazionario, non c' è antitesi; questo non significando altro che la divisibilità di quello, ossia un certo modo di considerare quello rispetto alle parti che comporta, le quali alla loro volta sono, in sè stesse, degli interi.

Ben è vero però che una specie di antitesi pare s' insinui nel pensiero; o vorrei dire, in una particolare modalità della rappresentazione; appunto perchè, il più delle volte, nel pensare e nell' enunciare la frazione, neanche apparisce l' imagine di quell' intero, senza di cui la frazione stessa non avrebbe nessun valore.

Del resto, comunque considerata, la frazione non esclude la discrezione del numero. Poichè, anche se fra l' uno e il due interponiamo tutti i possibili frazionamenti, che sono in numero infinito, essi sono sempre accompagnati da atti distinti e discreti del nostro pensiero.

È però d'avvertire che l'introduzione del numero irrazionale, colmerebbe la lacuna che s' apre tra i numeri interi, importando il concetto della continuità numerica e della divisibilità all' infinito. Ma non voglio ommettere di considerare, che codesta intuizione del numero non è primitiva, ma derivata;

Digitized by Google

è, voglio dire, una intuizione geometrica, in virtù della quale si trasferiscono nel numero le proprietà della retta; e come questa si tiene per un sistema di punti continuo, al punto si fa corrispondere il numero e reciprocamente: e di qui la continuità numerica. Ma la questione è strettamente matematica, e non mi soffermo. Vengo piuttosto ad allargare talune vedute indietro accennate, e che si riferiscono alla psicologia dell' idea del finito e dell' infinito applicata al numero: poichè nessun' altra questione filosofico-matematica è come questa viva e dibattuta.

Tanto l' infinitamente grande quanto l' infinitesimo, che sono come le due direzioni o i due aspetti che assume l' infinito, non sono realtà sperimentabili e direttamente percettibili. Quindi, a spiegare il modo della loro genesi e sussistenza nel pensiero, non si può ricorrere alla proprietà di un ente qualsiasi, ma alle proprietà della funzione mentale; in altre parole, alla proprietà del pensiero di elaborare il dato dell' esperienza, il quale intellettualizzato e concepito che sia, si spoglia del naturale limite impostogli dalla sensibilità, e ricomparisce alla visione della mente nella forma dell' infinito.

Come già mi espressi, l' infinito è una successiva integrazione operata dal pensiero sul finito.

Digitized by Google

L'integrazione del luogo dà lo spazio infinito; dell'istante, il tempo infinito; del numero, il numero infinito. Dove si nota intanto, nei riguardi gnoseologici, che il pensiero non crea dal nulla, ma si esercita sempre sopra un dato sperimentale trapassando da esso che è in atto, all'astratta possibilità di essere.

La matematica assume il concetto dell'infinito in un modo molto semplice: tale d'altronde, che sia sufficiente alle applicazioni che essa ne fa.

Giulio Tannery, per es. nell'*Introduzione alla teoria delle funzioni d'una variabile* si esprime così: La nozione dell'infinito, di cui non bisogna punto fare un mistero in matematica, si riduce a questo: après chaque nombre entier, il y en a un autre (1).

La filosofia non ne fa un mistero: trova che è un problema il quale risica di essere antitetico, e lo risolve distinguendo nella cognizione il lato oggettivo e soggettivo. Che dopo ogni numero ce ne sia un altro, è un fatto incontestabile: ma forse che con questa proposizione s'è abbracciato o sfiorato almeno il concetto dell'infinito? No davvero; perchè quest'altro numero che segue uno qualunque è sempre finito; mentre l'elemento fondamentale del concetto dell'infinito sta tutto nella *possibilità* di aggiunzioni senza limite.

(1) Parigi, Hermann 1886, pref. pag. VIII.

Digitized by Google

Ciò esclude, adunque, che l'infinito matematico sia un'entità mentale attualmente pensabile: è piuttosto la trascrizione in formule d'una tendenza che può durare continua. E altrettanto dicesi dell'infinitesimo o della divisibilità all' infinito. Nell' atto, l'infinitesimo non si raggiunge mai. Poichè esso non potrebb'essere che parte d'una grandezza o d'una quantità: parte infinitesima, ossia conato continuo verso il punto o lo zero, senza che siano mai raggiunti: perchè nè lo zero è un quanto si voglia piccolo numero, nè il punto è una parte quanto si vuole piccola della retta; e per ciò non sono limiti veri.

L'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo sono nozioni che risultano dall' impiego di una medesima funzione, applicata alla quantità finita in due opposte direzioni; che rispondono poi alle due operazioni aritmetiche fondamentali dell' aggiungere e del sottrarre. Per ciò l'infinito numerico non ha limite assegnabile, perchè la funzione soggettiva di cui diventa contenuto è continua: e se di essa non si tien conto, nè l'infinito numerico, nè qualsivoglia altra nozione eccedente l'esperienza, potrà essere mai esplicata.

Digitized by Google

XVI

Raccogliamo finalmente i punti principali della nostra discussione, e concludiamo; offrendo insieme quelle integrazioni e quegli schiarimenti, che si rendono necessarî per estrinsecare tutto il nostro pensiero e che in siffatte questioni, le quali ammettono disparati punti di vista, non sono mai soverchi.

I.° *Dal principio dell' impenetrabilità fisica e psichica, scaturisce direttamente e immediatamente l' idea del molteplice, e quindi dell' uno, non come numero, ma come limite: spaziale, se si tratta di corpi; temporale, se si tratta di stati di coscienza.*

Volendo spingere l'industria dell'analisi fin dove fosse stato possibile, a un punto cioè oltre il quale essa non avrebbe più potuto estendersi, mi arrestai al concetto d'impenetrabilità, in cui giace la ragione del molteplice che contiene, alla sua volta, la ragione dell'idea di numero. L'impenetrabilità è il sostegno a cui attacco l'uncino del mio ragionamento che, in due parole, è questo.

Senza il concetto della molteplicità, sarebbe impossibile pervenire al concetto di numero. Ma il concetto della molteplicità è primitivo o ha fondamento in un concetto che gli sia anteriore? In

Digitized by Google

altre parole: qual'è la ragione del molteplice? C'è bisogno di postularlo o lo si può dedurre? La ragione del molteplice ho creduto di trovarla in una proprietà primordiale della materia, l'impenetrabilità: la quale se non fosse, tutti i corpi potrebbero fare un sol corpo, perchè non ci sarebbe nessuna necessità che il luogo occupato da un corpo, non potesse anche essere occupato da un altro corpo: e quindi il qualche cosa fuori di qualche altra cosa, non sarebbe necessariamente, e la molteplicità, mancherebbe d'una base concreta, e il numero d'una giustificazione logica e reale.

L'elemento della molteplicità è l'uno, non come numero, ma come oggetto singolo, e contenuto della percezione sensibile. E mi piacque di chiamarlo limite, perchè è l'elemento in cui la molteplicità si rompe e si risolve; oltre di esso c'è il nulla. Io non so se la parola limite, usata in questo nuovo senso, potrà venire accolta senza contrasto: ma quando si è intesi sulle idee, la questione delle parole passa in seconda linea.

La limitazione offerta dall'uno può essere spaziale o temporale: ma poichè la molteplicità nello spazio dicesi ed è coesistenza. e la molteplicita nel tempo dicesi ed è successione, l'uno, pur conservando sempre il valore di limite, viene riguardato diver-

Digitized by Google

samente. Io mi sono sforzato di porre in luce questi due modi di rappresentabilità del coesistente e del successivo: hanno in comune il fatto che o i corpi nel primo caso, o gli avvenimenti e stati di coscienza nel secondo, sono fuori l'uno dell'altro. Ma questa nota comune non esclude il carattere differenziale, inteso meglio nell'intuizione di quello che non si possa con linguaggio, che riuscirebbe metaforico, perfettamente esprimere. L'*esser fuori* nella successione significa o un prima o un dopo: l'esser fuori nella coesistenza significa tutte le possibili relazioni spaziali destra, sinistra, alto, basso e via dicendo.

E siccome un processo di stati di coscienza implica che non si possano compiere tutti insieme contemporaneamente, ma esige che l'uno sia fuori dell'altro, ossia dopo l'altro, ho trasferito la legge d'impenetrabilità anche nella coscienza.

Qui si avrebbe potuto e si potrebbe schiudere il varco ad una disputa, che avesse per obbietto di concludere se nella coscienza, oltre che il successivo, ciò che è fuori d'ogni contestazione, trovasse luogo anche il coesistente. La coscienza (naturalmente qui il nostro linguaggio è metaforico; la coscienza è identificata colla psichicità, e non comporta, in questo caso, il significato di *consapevolezza*) deve intendersi come un piano, una specie di esten-

Digitized by Google

sione in cui possono coesistere parecchi punti; oppure come una linea di tempo, se mi si passa la frase, di cui i punti sono gli stati che s'inseguono perpetuamente, senza che due o più possano nel medesimo atto raccogliersi e raggrupparsi? Se si ricorre alla percezione interna ed esterna, apparisce che, nello stesso tempo, possiamo avvertire molte cose insieme; basta aprire i sensi alla scena del mondo esterno, o ripiegare l'attenzione su quella non meno svariata del nostro spirito. Ma siamo certi di non illuderci? Siamo certi che quanto appare compreso nello stesso atto, non sia invece una rapidissima successione di atti, la quale simula la contemporaneità senza raggiungerla mai? La risposta non è facile, nè si può dare qui per incidenza. Io credo che, nello stesso tempo, non sia possibile che un solo atto del pensiero o avvertimento della coscienza: e per ciò ho sempre differenziato, quasi per ragione di antitesi, la successione e la coesistenza.

II.° *Cominciando il processo della numerazione o del numerare, che è provocato dai successivi nella coscienza, a cui il pensiero tien dietro per la sua attività riflessiva, l' uno, fissato come un primo, diventa numero e inizia la serie dei numeri, i quali tutti, nell' atto stesso che si formano, sviluppano un riferimento retrospettivo.*

Digitized by Google

Posto, adunque, il molteplice, e quindi l'uno, come corollario dell'impenetrabile, si è sulla via del numero, ma per arrivarci bisogna che sieno soddisfatte parecchie esigenze. Il numero è l'effetto della funzione del numerare, proprio come il colore e l'effetto della funzione del vedere: ma questa è funzione sensitiva; quella intellettuale. Colla numerazione l'uno perde quel valore che ha rispetto alla coesistenza dei corpi nello spazio o alla successione degli stati di coscienza; diviene principio di numerazione, e acquista un valore tutto speciale, conferitogli dalla funzione intellettuale di cui è divenuto oggetto.

Ma come la funzione sensitiva non si esplica senza uno stimolo, così la funzione intellettuale non si dispiega se non è provocata. E la funzione intellettuale del numerare è provocata dalla successione, ossia dal fatto che qualche cosa è *prima* e qualche cosa è *dopo*. La coesistenza, per così dire, immobile degli oggetti, è il molteplice e nient'altro: per assumerla *sub specie numeri,* conviene contarne gli elementi i quali rientrano tosto nella categoria della successione: anzi contare non è altro che frazionare il tempo. Ecco perchè io ho insistito, affine di ridurre il numero all'ombra di quest'ultimo concetto, dove forse avrebbe trovato la ragione immediata della sua esistenza nel pensiero.

Digitized by Google

Circa il riferimento retrospettivo sviluppato da ogni numero della serie, non mi pare di dovere spendere molte parole per ulteriori schiarimenti. Questo riferimento è in fondo essenziale per giustificare il valore di ogni numero. La significazione di un numero qualsiasi è sempre tale rispetto ai precedenti, i quali non si pensano attualmente, il che, oltre pochi numeri, sarebbe impossibile: ma se non si pensano attulmente, potenzialmente debbono essere di necessità supposti. In forza di questa supposizione, richiesta da ogni numero, dei precedenti, la serie è improntata di una certa continuità virtuale, o potrei dire anche ideale, che nel fatto però resta interrotta e disgregata dalle stesse entità numeriche che man mano si compongono.

III.° *Il pensiero che può riflettere sopra i suoi atti distinti nel tempo, snida, per così esprimermi, l' unità identificata ne' suoi atti medesimi, continui in sè, ma discreti nel loro ordinamento seriale.*

L' unità pone il pensar matematico in una condizione specialissima, rispetto alle verità che conseguono dal meccanismo delle relative operazioni: appunto perchè ogni unità essendo identica e inalterabile, rimangono improntate del carattere del l' assoluto, dell' universale e del necessario le conoscenze che sovr' esse si fondano.

Digitized by Google

In quanto alla genesi dell' unità, giova rammentare ch'essa si collega colle esigenze della numerazione astratta, e delle speciali operazioni nelle quali si esplica la mirabile industria del pensiero logico-matematico. Ogni oggetto, e per estendere debitamente la sfera del numerabile, direi meglio ogni reale psichico o corporeo, può essere considerato come una unità. Ma è evidente che questo prisma dell' unità, sotto cui ogni cosa può considerarsi, non è, in fondo, che l'atto stesso del pensiero, a prescindere dal contenuto nel quale si appunta. È l'atto della considerazione, astrazione fatta dalla natura della cosa che si considera. Da ciò appare manifesta la differenza tra l'uno e l'unità; differenza che può esprimersi così. L' unità è il numerabile o, a dir più rettamente, l' oggetto o il contenuto astratto della numerazione: l'uno è il primo momento in cui si esplica la funzione del numerare, dalla quale è fatto numero. E badisi che parlo di un contenuto astratto della numerazione e non di una numezione astratta, perchè la numerazione in realtà è sempre concreta, essendo una funzione. Due unità e due cavalli non differiscono evidentemente nei riguardi della numerazione, ma semplicemente della cosa numerata.

E non c' è che l'atto del pensiero che soddisfi alle condizioni sovraespresse, concernenti il carattere

Digitized by Google

delle verità matematiche; perchè il pensiero ne' propri atti non si specifica nè si differenzia, ma rimane, riguardo ad ogni contenuto, impassibile, sempre identico a sè medesimo. Distinguendo poi l' atto del pensiero dal contenuto in cui s' appunta, non faccio che constatare il fatto psicologico dell' attenzione, la quale potendo rivolgersi a qualsiasi fenomeno dell' universo e dello spirito, in sè stessa rimane inalterabile, come uno specchio dinanzi a mille oggetti dei quali riproduce l' imagine.

Così l' unità svincolatasi da ogni condizione qualitativa e quindi da ogni necessità causale, diventa un' entità logica: per cui i ragionamenti a cui serve di sostrato e che scaturiscono dall' infinita potenzialità del pensiero, non richieggono che la propria interna esattezza. Una verità fisica è rispondenza del pensiero a qualche cosa che ne è fuori; una verità matematica è rispondenza del pensiero a sè stesso. La matematica è provincia logica.

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOGRAFIA

Sono lontanissimo dal proposito di offrire una completa bibliografia sull'argomento. Forse a qualcuno potrà non dispiacere di conoscere o ricordare talune opere di maggiore o minor mole ed importanza, che riguardano le questioni da me trattate.

R. Dedekind. Was sind un was sollen die Zahlen? Braunschweig, 1888.

G. Frege. Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau, 1884.

idem. Le nombre entier. Nella Revue de Met. e de Mor. Genn. 1895.

E. Schröder. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Leipzig, 1873.

R. A. Lipschitz. Lehrbuch der Analysis. Bonn, 1877.

Georg Cantor. Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Leipzig, 1883.

Baumann. Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik. Ved. Frege op. cit. pag. 5.

O. Stolz. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Erster theil. Leipzig, 1885

Hankel. Zur Geschichte der Mathematik. 1874.

L. Kronecker. Ueber den Zahlbegriff. (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Sonderabdruck aus Heft. 4 Bd. 101).

H. Grassmann. Lerbuch d. Arithmetik 1861

Cugnin. Essai de Psychologie mathématique, Nizza 1878.

Digitized by Google

Farges. L'Idée du continu dans l'Espace et le Temps, 1894, Paris, Roger et Chenovitz.

O. Schmitz-Dumont. Naturphilosophie als exakte Wissenschaft Leipzig, 1895.

Pillon. A propos de la notion de nombre. Nella Critique phil. Maggio - Ottobre 1883.

Herb. Nichols. Our Notions of Number and Space. Boston 1894.

F. Masci. Sulla natura logica delle conoscenze matematiche. Roma, 1885.

P. Gazzaniga. Libro di Aritmetica e di Algebra elementare. Padova. Sacchetto, 1896. V. specialmente le acute « osservazioni preliminari ».

Nella « Revue philos. » diretta dal Ribot.

Febbraio e Novembre 1879. **P. Tannery.** La Theorie de la connaissance mathematique.

Maggio 1881. **P. Tannery et F. Evellin.** Sur l'infini mathématique. Discussioni.

Giugno 1880. **Ch. Renouvier.** L'infini actuel est-il contradictoire ? Réponse a M. H. Lotze.

Dicembre 1882. **P. Tannery.** Histoire du concept de l'enfini au VI.° siècle avant I. C.

Ottobre 1885. **P. Tannery.** Le concept scientifique du continu: Zenon d'Élée et G. Cantor.

Agosto 1886. **G. Noël.** L'idée de nombre et ses conditions.

Nella « Revue de Métaphysique et de Moral »
Vol I.° 1893.

H. Poincarè. Le continu mathématique pag. 26.

G. Noel. Le mouvement et les arguments de Zenon d'Élée pag. 108.

G. Milhaud. Le concept du nombre chez les Pythagoriciens et les Éléates pag. 140.

V. Brochard. Les prétendus sophismes de Zenon d'Élée p. 209.

C. Riquier. De l'idée de nombre considérée comme fondement des sciences mathématiques pag. 346.

Digitized by Google

F. Evellin, G. Lechalas, G. Milhaud. Discussioni intorno agli argomenti di Zenone Eleatico da pag 382 a pag. 404.

Vol. II.° 1894.

F. Evellin. La divisibilité dans la grandeur: grandeur et nombre pag. 129.

E. Ballue. Le nombre entier, considéré comme fondement de l'analise mathématique pag 317.

H. Poincarè. Sur la nature du raisonnement mathématique pag. 371.

P. Tannery. Sur le concept du transfini. pag. 465.

E. le Roy et G. Vincent. Sur la méthode mathématique pagine 497-530; 676-708

G. Léchalas. Note sur la nature du raisonnement mathématique pag. 707.

Digitized by Google

Digitized by Google